Studies on Matrix Eigenvalue Problems in Terms of Discrete Integrable Systems(Abstract_要旨)

AUTHOR(S):

Akaiwa, Kanae

（ 続紙 1 ）

京都大学	博士（情報学）	氏名	赤岩　香苗
論文題目	Studies on Matrix Eigenvalue Problems in Terms of Discrete Integrable Systems （離散可積分系による行列固有値問題の研究）		

（論文内容の要旨）

数値解析学に現れるquotient-difference(qd)法の漸化式は数理物理学を起原とする非線形可積分系である離散戸田方程式に一致し、その行列式解を特徴づけるある種の線形関係式を利用することで、単純固有値をもつ3重対角行列に対するqd法の固有値への収束性を証明することができる。

本論文は、離散可積分系に基づく数値計算法開発の観点から、行列固有値問題の順問題、および逆固有値問題の解法の提案を行っている。まず、フィボナッチ数列を利用して、ある離散可積分系の行列式解とその漸近挙動を調べている。さらに、重複固有値をもつ3重対角行列に対するqd法の収束性を、離散戸田方程式の行列式解の漸近展開を利用して明らかにしている。また、すべての小行列式が正であるという制約から、これまで有限回反復解法は知られていなかったtotally nonnegative(TN)行列の逆固有値問題を考察し、離散可積分系に基づくTN行列構成法を開発している。

本論文は全7章からなる。

第1章は、行列固有値計算や近似理論において定式化されたqd法、それとは全く独立に発見された離散戸田方程式について順に説明し、本研究の動機付けを与える数値計算法と離散可積分系との密接な関係を論じて本論文の目的と構成を述べている。

第2章は、離散可積分系のひとつである離散ロトカ・ボルテラ系の解を記述するハンケル行列式の成分間に成り立つ線形関係式をフィボナッチ数列の漸化式によって定め、離散有限ロトカ・ボルテラ系の特殊解の変数の1つが、時刻無限大の極限において、黄金比に収束することを示している。

第3章は、発見者のルティスハウザ以来、単純固有値の仮定のもとにqd法の収束解析が行われてきたが、ここでは、qd法と等価な離散戸田方程式の行列式解の漸近展開が3重対角行列の固有値で表されること、およびqd法の漸化式が3重対角行列の固有値保存変形を記述することを利用して、重複固有値をもつ3重対角行列に対するqd法の収束性を明らかにするとともに、その収束次数を与えている。

第4章では、離散戸田方程式の行列式解の各成分が、戸田方程式が固有値保存変形を記述する3重対角行列の固有値を用いて表現されることに着目し、指定した重複固有値をもつ3重対角行列をqd法の漸化式によって具体的に構成する、3重対角行列に対する逆固有値問題の解法を定式化している。

第5章では、第4章と同様に、離散可積分系の行列式解の各成分が、この可積分系が固有値保存変形を記述するヘッセンベルグ行列の固有値で表されることに着目し、離散ハングリー戸田方程式の漸化式を利用したヘッセンベルグ型のTN行列に対する逆固有値問題の解法を提案している。TN性は行列式の正値性より従う。

第6章は、まず、帯行列型のTN行列の固有値保存変形を記述する離散可積分系を導出し、第5章の結果を発展させて、指定した固有値をもつ帯行列型のTN行列を構成する方法を定式化している。

第7章では結論として、本論文で得られた結果の要約とともに今後の展望について述べ、本論文全体のまとめを与えている。

注）論文内容の要旨と論文審査の結果の要旨は１頁を３８字×３６行で作成し、合わせて、３，０００字を標準とすること。

論文内容の要旨を英語で記入する場合は、４００～１，１００wordsで作成し
審査結果の要旨は日本語５００～２，０００字程度で作成すること。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

本論文は、離散可積分系と数値計算法との関係の根源に立ち返り、離散可積分系の解の行列式表現、および行列式の成分間に成り立つ線形関係式に着目することで、離散可積分系に基づく固有値計算法の収束性解析および逆固有値問題の解法の開発を行ったものである。

3重対角行列の固有値計算法として著名なルティスハウザのquotient-different (qd)法の漸化式は非線形ではあるが、一般項をハンケル行列式で表すことができ、その成分間には線形な関係式が成り立つ。このことからqd法は1変数代数方程式の解や数列の極限を求めるベルヌーイ法のある種の拡張と見なせる。また、近年の研究で、qd法の漸化式は、離散可積分系の離散戸田方程式と一致することがわかり、解の正値性が保証され、かつ多様性のある離散可積分系に基づいて相対精度の意味で高精度な固有値計算法を定式化する研究が開始されている。

申請者は、まず、線形関係式を定める数列の極限と離散可積分系の対応の具体化として、離散ロトカ・ボルテラ方程式の初期値をフィボナッチ数列で与えるとき、特殊解の変数の1つが時刻無限大の極限において黄金比に収束することを示している。

さらに、ハンケル行列式を使った離散戸田方程式の解の表現、および行列式の成分間に成り立つ線形関係式の一般項の表示式を利用することで、ターゲットとする3重対角行列が重複固有値をもつ場合のqd法の漸近解析を行い、単純固有値の場合と同様に、qd法の固有値への収束性を明らかにしている。申請者が開発した手法は、行列式解をもつ他の離散可積分系を由来とする固有値計算法に対しても適用可能と期待される。

一方、申請者は、離散可積分系に基づく逆固有値問題という新しい課題設定のもとで、指定した固有値をもつ行列を構成する逆固有値問題の有限回反復解法を与えている。この提案は一般性をもつものであるが、本論文では、そのうち重複固有値をもつ3重対角行列、ヘッセンベルグ型のtotally nonnegative(TN)行列に対して、それぞれqd法、離散ハングリー戸田方程式を用いた構成法を与えている。また、帯行列の固有値保存変形を記述する離散可積分系を新たに導入して、これによる帯行列型TN行列の構成法の開発に成功している。

本学位申請に係る研究は、3重対角行列が重複固有値をもつ場合のqd法の詳細な収束性解析を行うとともに、すべての小行列式が非負であるという制約の厳しさからこれまで有限反復解法の開発が困難とされてきたTN行列の逆固有値問題に対して、離散可積分系を用いた新たなアプローチに成功しており、離散可積分系に基づく数値計算法の研究に逆固有値問題という新テーマを切り開くとともに、今後の更なる発展が期待される。

以上のように、本論文は行列固有値問題を離散可積分系の観点から捉えることで、新しい知見を得ているだけではなく、応用上も重要な逆固有値問題の解法の発展に貢献する研究として高く評価されるものである。よって、本論文は博士（情報学）の学位論文として価値あるものとして認める。また、平成27年8月31日に実施した論文内容とそれに関連した試問の結果合格と認めた。

注）論文審査の結果の要旨の結句には、学位論文の審査についての認定を明記すること。
更に、試問の結果の要旨（例えば「平成　年　月　日論文内容とそれに関連した口頭試問を行った結果合格と認めた。」）を付け加えること。
Webでの即日公開を希望しない場合は、以下に公開可能とする日付を記入すること。
要旨公開可能日：平成28年9月24日以降